1　問題設定

前のファイルを参照

2　ベイズ推論

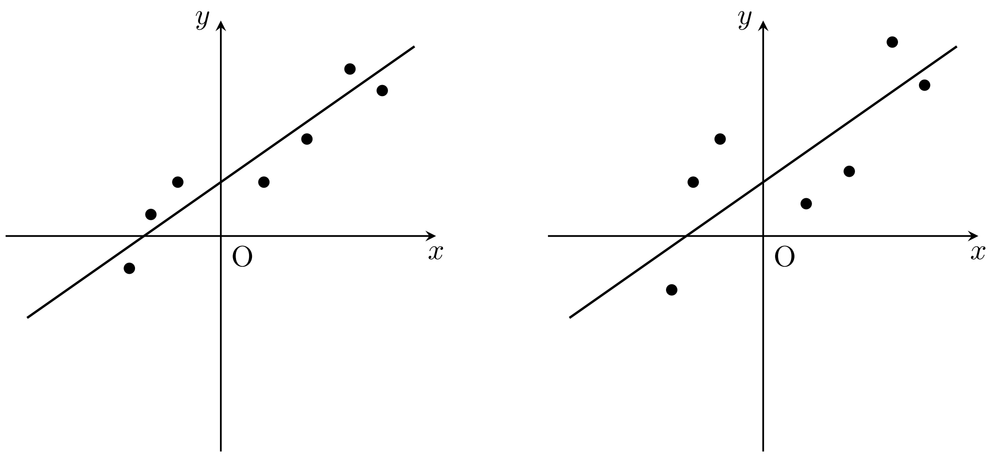
2.1　a と b の分布

$$y_i = ax_i + b + n_i$$

n_i：ノイズ
前提：すべての事象が確率的に起こる

$$n_i \sim N(0, \sigma^2)$$
$$p(n_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{n_i^2}{2\sigma^2}\right)$$
$$\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$$
$$\mathbb{Y} = \{y_1, y_2, \cdots, y_N\}$$

$\mathbb{X}$ と $\mathbb{Y}$ から a と b の確率分布が知りたい



$$p(a, b)??$$

最小二乗法では a と b の推定値は左右で同じ

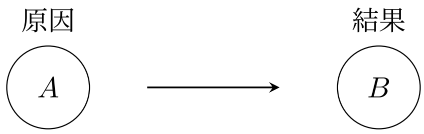
ベイズ統計では a と b の推定量が

シャープな Gauss 分布を与える $\longleftrightarrow$ ブロードな Gauss 分布になる

$p(A \mid B)p(B)$ =(B が起こった後に A が起こる確率)× (B が起こる確率)

確率の積の法則

$$
\begin{aligned}
p(A,B) &= p(A|B)p(B) \quad \longleftarrow \text{因果律} \\
&= p(B|A)p(A) \quad \longleftarrow \text{自然科学、データ解析}
\end{aligned}
$$



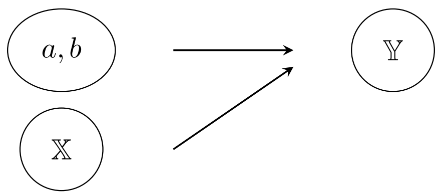
生成モデル

$$p(B|A)$$

因果律

推論：結果から原因を探る

$$
\begin{aligned}
p(A|B)p(B) &= p(B|A)p(A) \\
p(A|B) &= \frac{1}{p(B)}p(B|A)p(A) \\
&\propto p(B|A)p(A)
\end{aligned}
$$



$p(a, b \mid \mathbb{X}, \mathbb{Y})$ が知りたい

同時分布

$$p(\mathbb{X}, \mathbb{Y}, a, b)$$

$$
\begin{aligned}
p(\mathbb{X},\mathbb{Y},a,b) &= p(\mathbb{Y}|\mathbb{X},a,b)p(\mathbb{X})p(a,b) \\
p(\mathbb{Y}|\mathbb{X},a,b) &= \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\{y_i - (ax_i + b)\}^2}{2\sigma^2} \right) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{N}{2\sigma^2} \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \{y_i - (ax_i + b)\}^2}_{E(a,b)} \right) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{N}{2\sigma^2} E(a,b) \right) \\
E(a,b) &= E(a_0,b_0) + \overline{x^2}(a-a_0)^2 + (b-b_0)^2 \\
a_0 &= \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}},\ b_0 = \overline{y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p(\mathbb{X},\mathbb{Y},a,b) &= p(\mathbb{Y}|\mathbb{X},a,b)p(\mathbb{X})p(a,b) \\
&= p(a,b\ |\mathbb{X},\mathbb{Y})p(\mathbb{X},\mathbb{Y})
\end{aligned}
$$

ここで，$p(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ はいま a, b を変数とみているため定数であり，また $p(\mathbb{X})$, $p(a,b)$ が一様分布であると仮定すると，

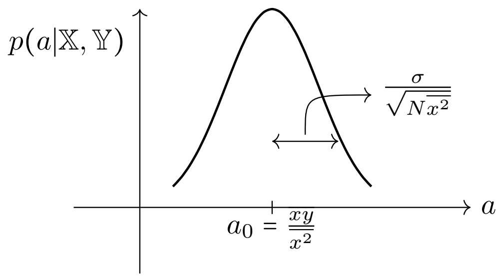
$$
\begin{aligned}
p(a,b\ |\mathbb{X},\mathbb{Y}) &\propto p(\mathbb{Y}|\mathbb{X},a,b) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{N}{2\sigma^2} E(a,b) \right) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{N}{2\sigma^2} E(a_0,b_0) \right) \\
&\qquad \times \exp\left(-\frac{N\overline{x^2}}{2\sigma^2} (a-a_0)^2 \right) \\
&\qquad \times \exp\left(-\frac{N}{2\sigma^2} (b-b_0)^2 \right) \\
&\propto \exp\left(-\frac{N\overline{x^2}}{2\sigma^2} (a-a_0)^2 \right) \exp\left(-\frac{N}{2\sigma^2} (b-b_0)^2 \right)
\end{aligned}
$$

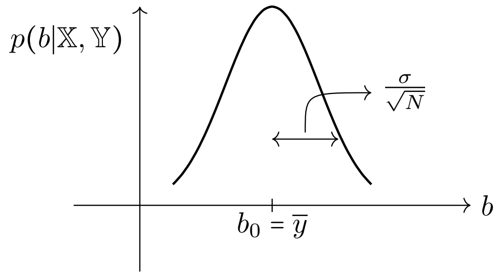
$p(a,b|\mathbb{X},\mathbb{Y}) = p(a|\mathbb{X},\mathbb{Y})p(b|\mathbb{X},\mathbb{Y})$ と書ける

$\int da\ p(a|\mathbb{X},\mathbb{Y}) = \int db\ p(b|\mathbb{X},\mathbb{Y}) = 1$ より

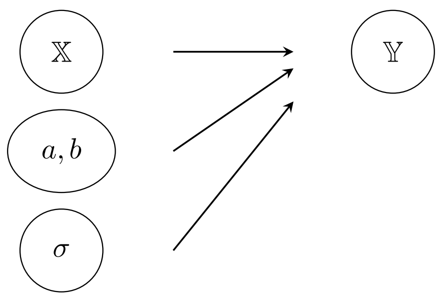
$$
\begin{cases}
p(a|\mathbb{X},\mathbb{Y}) & = \sqrt{\frac{N\overline{x^2}}{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{N\overline{x^2}}{2\sigma^2} (a-a_0)^2 \right) \\
p(b|\mathbb{X},\mathbb{Y}) & = \sqrt{\frac{N}{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{N}{2\sigma^2} (b-b_0)^2 \right)
\end{cases}
$$

となる





2.2 ノイズ σ の推定



生成モデル

$$p(\mathbb{Y}|\mathbb{X}, a, b)$$

ノイズ σ を取り入れる

$$p(\mathbb{Y}|\mathbb{X}, a, b, \sigma)$$

$$p(\sigma|\mathbb{X}, \mathbb{Y}) \rightarrow \sigma\text{を決めて}$$
$$p(a, b|\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \sigma)$$

$p(\mathbb{X},\mathbb{Y},a,b,\sigma)$ を考える

$$
\begin{aligned}
p(\mathbb{X},\mathbb{Y},\sigma) &= \int da \int db \quad \underset{p(\sigma)p(a,b)p(\mathbb{X})p(\mathbb{Y}|\mathbb{X},a,b,\sigma)}{\underline{p(\mathbb{X},\mathbb{Y},a,b,\sigma)}} \\
&\propto \int da \int db\ p(\mathbb{Y}|\mathbb{X},a,b,\sigma) \\
p(\mathbb{X},\mathbb{Y},\sigma) &= p(\sigma|\mathbb{X},\mathbb{Y})p(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \\
\therefore p(\sigma|\mathbb{X},\mathbb{Y}) &\propto \int da \int db\ p(\mathbb{Y}|\mathbb{X},a,b,\sigma) \\
&= \int da \int db\ (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{N}{2\sigma^2}E(a,b)\right) \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{N}{2\sigma^2}E(a_0,b_0)\right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\int da\ \exp\left(-\frac{N\overline{x^2}}{2\sigma^2}(a-a_0)^2\right)}$$

$$\boxed{\int db\ \exp\left(-\frac{N}{2\sigma^2}(b-b_0)^2\right)}$$

$$\boxed{\qquad} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{N\overline{x^2}}}$$

$$\boxed{\qquad} = \sqrt{\frac{2\pi\sigma^2}{N}}$$

$$= (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{N}{2\sigma^2}E(a_0,b_0)\right) \times \sqrt{\frac{1}{N^2\overline{x^2}}}$$

最大事後確率推定

MAP(Maxium a posteriori) 推定

$$
\begin{aligned}
F(\sigma) &= -\log p(\sigma|\mathbb{X},\mathbb{Y}) \\
&= \frac{N}{2\sigma^2}E(a_0,b_0) + \frac{N-2}{2}\log\left(2\pi\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

$$S = \sigma^2$$

$$
\begin{aligned}
F(S) &= \frac{N}{2S}E(a_0,b_0) + \frac{N-2}{2}\log(2\pi S) \\
\frac{\mathrm{d}F(S)}{\mathrm{d}S} &= -\frac{N}{2S^2}E(a_0,b_0) + \frac{N-2}{2S} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S(N-2) &= NE(a_0, b_0) \\
S &= \frac{NE(a_0, b_0)}{N-2} \\
\sigma^2 &= \frac{N}{N-2}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\{y_i - (a_0 x + b_0)\}^2 \\
&= \frac{1}{N-2}\sum_{i=1}^{N}\{y_i - (a_0 x + b_0)\}^2
\end{aligned}
$$